第 4 节 整体换元法的应用（★★★）

内容提要

整体换元法是三角函数的核心方法之一，在处理函数 $y = A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 的图象性质问题时，常将 $\omega x+\varphi$ 换元成 t，借助 $y=\sin t$ 的图象性质来解决问题，这种方法在求值域、单调区间、对称轴、对称中心、解不等式等诸多问题中有着广泛的应用，它可以将复杂函数问题转化为简单函数问题.

典型例题

类型Ⅰ：整体换元求最值、解不等式

【例 1】函数 $f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}-x)\sin x-\sqrt{3}\cos^2 x(\frac{\pi}{12}\le x\le\frac{5\pi}{6})$ 的最小值为_____.

解析：由题意，$f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}-x)\sin x-\sqrt{3}\cos^2 x=\cos x\sin x-\sqrt{3}\cos^2 x=\frac{1}{2}\sin 2x-\sqrt{3}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}$

$=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin(2x-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

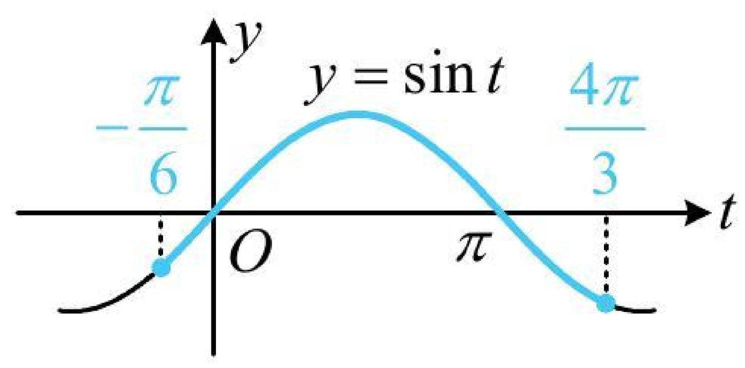
要求 $f(x)$ 的最小值，直接对 $f(x)$ 作图较麻烦，可将 $2x-\frac{\pi}{3}$ 换元成 t，用 $y=\sin t$ 的图象来分析，

令 $t=2x-\frac{\pi}{3}$，则 $f(x)=\sin t-\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为 $\frac{\pi}{12}\le x\le\frac{5\pi}{6}$，所以 $-\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{4\pi}{3}$，

当 $\sin t$ 最小时，$f(x)$ 也最小，故要求 $f(x)$ 的最小值，可先求 $y=\sin t$ 在 $[-\frac{\pi}{6},\frac{4\pi}{3}]$ 上的最小值，

函数 $y=\sin t$ 的部分图象如图所示，由图可知，$f(x)_{\min}=\sin\frac{4\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sin\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$.

答案：$-\sqrt{3}$



【例 2】已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{3})+2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2 x+1$，则不等式 $f(x)\le 2\sqrt{3}$ 的解集为_____.

解析：$f(x)=2\sqrt{3}(\sin 2x\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sqrt{3}\sin 2x+2\cos 2x=4\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，

所以 $f(x)\le 2\sqrt{3}$ 即为 $4\sin(2x+\frac{\pi}{6})\le 2\sqrt{3}$，也即 $\sin(2x+\frac{\pi}{6})\le\frac{\sqrt{3}}{2}$，

三角不等式常画图来解，画 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 的图象较麻烦，故将 $2x+\frac{\pi}{6}$ 换元成 t，用 $y=\sin t$ 的图象来解，

令 $t=2x+\frac{\pi}{6}$，则 $\sin t\le\frac{\sqrt{3}}{2}$，函数 $y=\sin t$ 的部分图象如图，

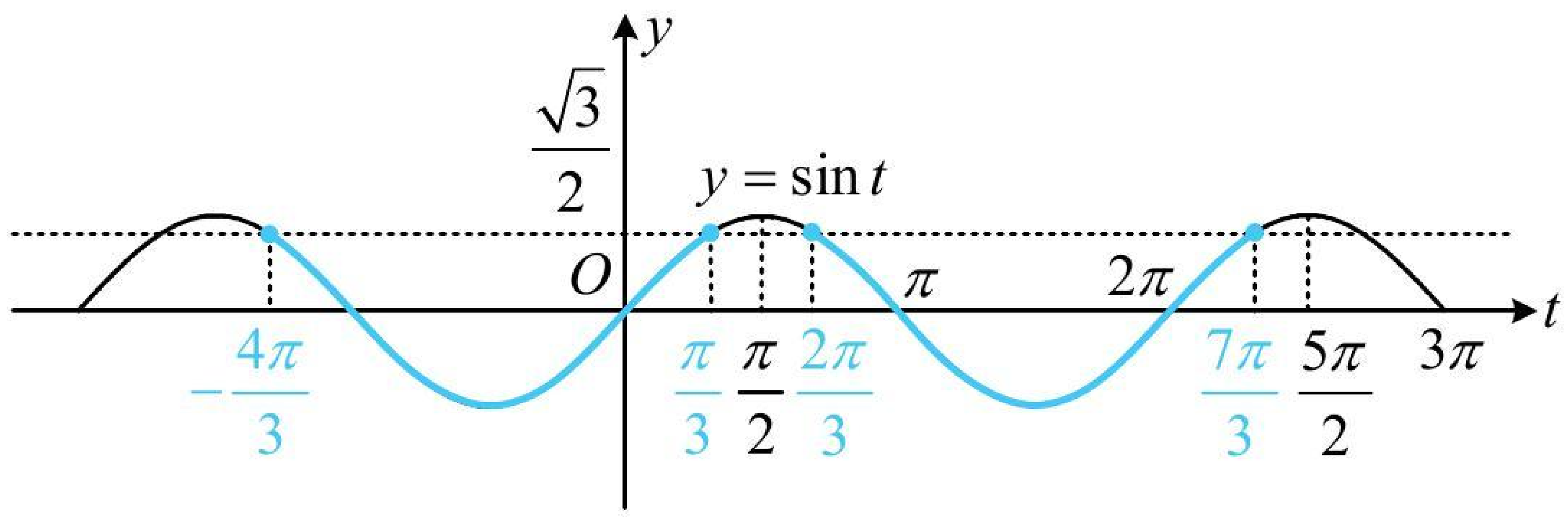
由图可知不等式 $\sin t \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的解也呈现出周期特征，可先取一个周期内的解，再加上周期的整数倍，

在 $[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2})$ 这个周期上，$\sin t \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的解集为 $[\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{3}]$，所以 $\sin t \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ 全部的解集为 $[2k\pi+\frac{2\pi}{3},2k\pi+\frac{7\pi}{3}]$，

再将 t 换回 $2x+\frac{\pi}{6}$ 解 x，由 $2k\pi+\frac{2\pi}{3}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{7\pi}{3}$ 可得：$k\pi+\frac{\pi}{4}\le x\le k\pi+\frac{13\pi}{12}$，

所以不等式 $f(x)\le 2\sqrt{3}$ 的解集为 $[k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{13\pi}{12}](k\in\mathbf{Z})$.

答案：$[k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{13\pi}{12}](k\in\mathbf{Z})$



【总结】解有关 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 的函数值问题，可令 $t=\omega x+\varphi$，用 $y=\sin t$ 的图象来分析更简单.

类型 II：整体换元研究单调区间

【例 3】函数 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 的单调递增区间是_____，单调递减区间是_____.

解析： 函数 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 是由 $y=\sin t$ 和 $t=2x-\frac{\pi}{3}$ 复合而成，复合函数遵循同增异减的单调性准则，

内层的 $t=2x-\frac{\pi}{3}$ 显然↗，所以要求 $f(x)$ 的增区间，只需求 $y=\sin t$ 的增区间，

函数 $y=\sin t$ 的增区间是 $[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}]$，其中 $k\in\mathbf{Z}$，令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{3}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，

解得：$k\pi-\frac{\pi}{12}\le x\le k\pi+\frac{5\pi}{12}$，所以 $f(x)$ 的增区间是 $[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}]$；

与求增区间同理，由复合函数的同增异减准则，要求 $f(x)$ 的减区间，只需求 $y=\sin t$ 的减区间，

函数 $y=\sin t$ 的减区间是 $[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}]$，其中 $k\in\mathbf{Z}$，

令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{3}\le 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$ 可得：$k\pi+\frac{5\pi}{12}\le x\le k\pi+\frac{11\pi}{12}$，

所以 $f(x)$ 单调递减区间是 $[k\pi+\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{11\pi}{12}]$.

答案：$[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}](k\in\mathbf{Z})$，$[k\pi+\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{11\pi}{12}](k\in\mathbf{Z})$

【反思】函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的增区间可由不等式 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le\omega x+\varphi\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 来求，减区间可

由不等式$2k\pi+\frac{\pi}{2}\le\omega x+\varphi\le 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$来求.

【变式 1】函数$f(x)=\sin(\frac{\pi}{3}-2x)$的单调递增区间是_____.

解法 1：解析式中x的系数为负，习惯上一般先用诱导公式化负为正，可用公式$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$实现，

$f(x)=\sin(\frac{\pi}{3}-2x)=-\sin(2x-\frac{\pi}{3})$，要求$f(x)$的增区间，只需求$y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$的减区间，

令$2k\pi+\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{3}\le 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$可得：$k\pi+\frac{5\pi}{12}\le x\le k\pi+\frac{11\pi}{12}$，

所以$f(x)$的增区间是$[k\pi+\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{11\pi}{12}](k\in\mathbf{Z})$.

解法 2：也可以用$\sin\alpha=\sin(\pi-\alpha)$来将$x$的系数化负为正，

$f(x)=\sin(\frac{\pi}{3}-2x)=\sin[\pi-(\frac{\pi}{3}-2x)]=\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$，

令$2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{2\pi}{3}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$可得：$k\pi-\frac{7\pi}{12}\le x\le k\pi-\frac{\pi}{12}$，

所以$f(x)$的增区间是$[k\pi-\frac{7\pi}{12},k\pi-\frac{\pi}{12}](k\in\mathbf{Z})$；

这个结果好像和解法 1 的不同，但实际上它们是一样的，代几个k进去写出来看看便知.

答案：$[k\pi+\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{11\pi}{12}](k\in\mathbf{Z})$

【变式 2】函数$f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$在$[-\frac{\pi}{2},0]$上的单调递增区间是_____.

解析：设$t=2x-\frac{\pi}{3}$，则$f(x)=\sin t$，当$x\in[-\frac{\pi}{2},0]$时，$t\in[-\frac{4\pi}{3},-\frac{\pi}{3}]$，

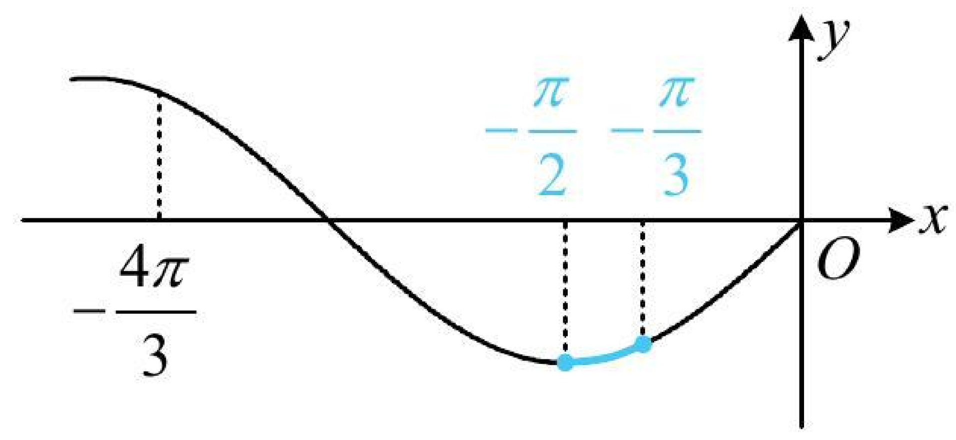
要求$f(x)$的增区间，只需寻找函数$y=\sin t$在$[-\frac{4\pi}{3},-\frac{\pi}{3}]$上的增区间，

如图，由图可知函数$y=\sin t$在$[-\frac{4\pi}{3},-\frac{\pi}{2}]$上↘，在$[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}]$上↗，

所以令$-\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{3}\le-\frac{\pi}{3}$可得：$-\frac{\pi}{12}\le x\le 0$，

故$f(x)$在$[-\frac{\pi}{2},0]$上的单调递增区间是$[-\frac{\pi}{12},0]$.

答案：$[-\frac{\pi}{12},0]$



【变式 3】若函数 $f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{3})(\omega>0)$ 在 $(0,\frac{\pi}{3})$ 上是单调函数，则 ω 的取值范围为_____.

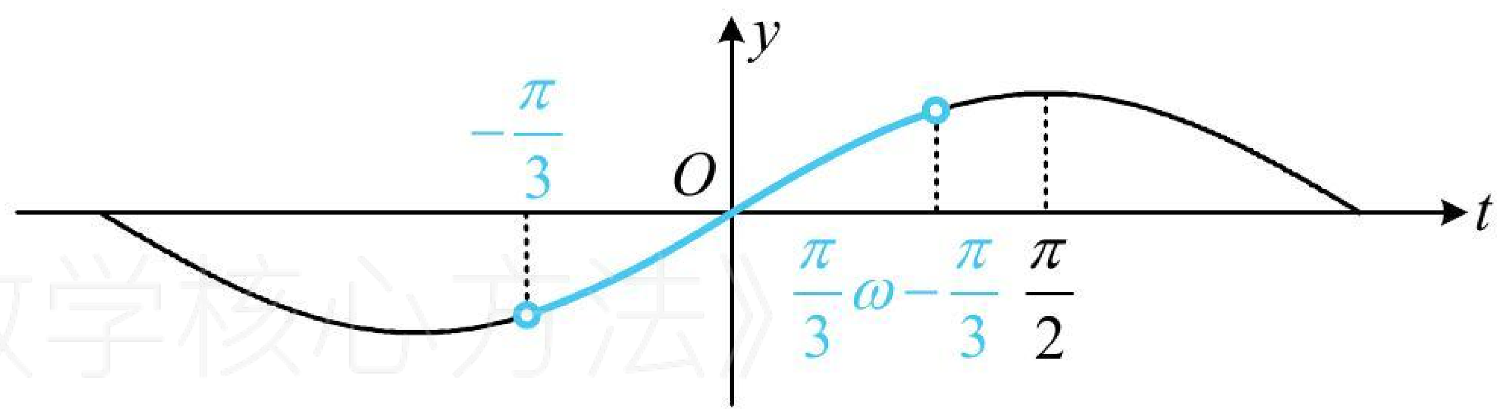
解析： 先将 $\omega x-\frac{\pi}{3}$ 换元成 t，借助 $y=\sin t$ 的图象来研究问题，

设 $t=\omega x-\frac{\pi}{3}$，则 $f(x)=\sin t$，当 $x\in(0,\frac{\pi}{3})$ 时，$t\in(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{3})$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{3})$ 上是单调函数等价于 $y=\sin t$ 在 $(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{3})$ 上是单调函数，

如图，由图可知应有 $\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}$，结合 $\omega>0$ 可得 $0<\omega\le\frac{5}{2}$.

答案： $(0,\frac{5}{2}]$



【变式 4】若函数 $f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{3})(\omega>0)$ 在 $(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$ 上单调递增，则 ω 的取值范围为_____.

解析： 先把 $\omega x-\frac{\pi}{3}$ 换元成 t，转化为 $y=\sin t$ 来研究单调性，

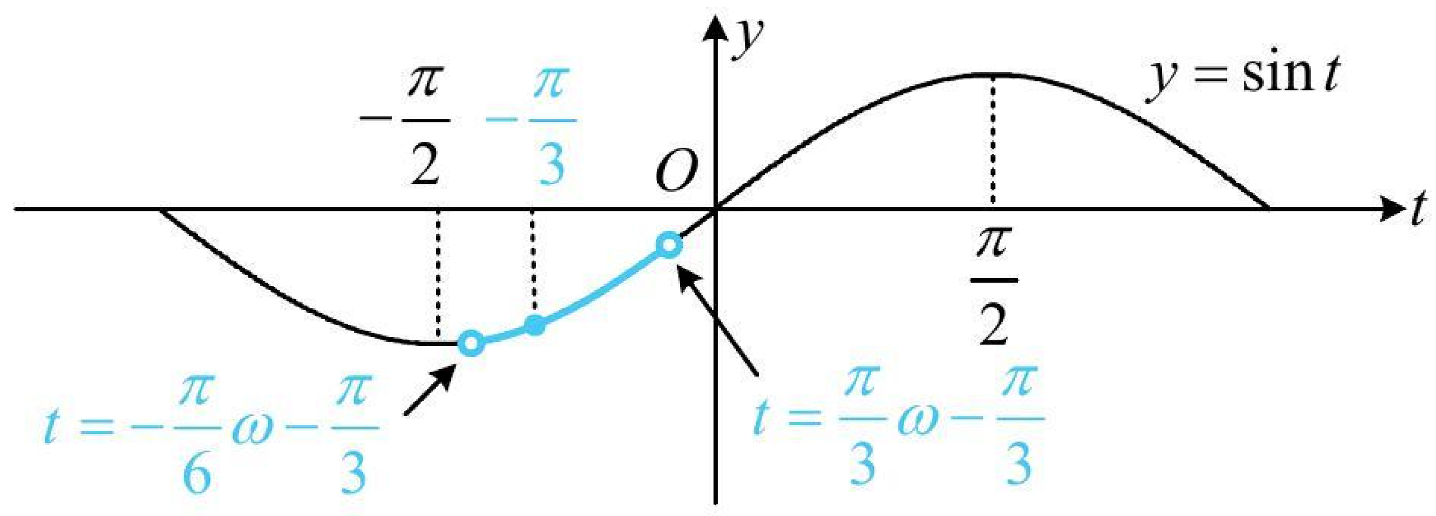
设 $t=\omega x-\frac{\pi}{3}$，则 $f(x)=\sin t$，当 $x\in(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$ 时，$t\in(-\frac{\pi}{6}\omega-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{3})$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$ 上↗等价于 $y=\sin t$ 在 $(-\frac{\pi}{6}\omega-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{3})$ 上↗，

此区间左右端点都在变，怎么分析呢？注意到 $-\frac{\pi}{3}$ 在该区间内，要保证单调，该区间只能包含于 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，

所以 $\begin{cases}-\frac{\pi}{6}\omega-\frac{\pi}{3}\ge-\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$，结合 $\omega>0$ 可得 $0<\omega\le1$.

答案： $(0,1]$



【变式 5】已知函数 $f(x)=a\sin x+2\cos x$ 在 $[-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{4}]$ 上单调递减，则实数 a 的取值范围是_____.

解析： 本题若用辅助角公式合并成 $\sqrt{a^2+4}\sin(x+\varphi)$，由于 φ 与 a 有关，将 $x+\varphi$ 整体换元作用不大，不易分析单调性，所以不合并，那如何研究单调性呢？可求导分析，

由题意，$f'(x)=a\cos x-2\sin x\le 0$ 在 $[-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{4}]$ 上恒成立，所以 $a\cos x\le 2\sin x$，

此不等式可全分离，先判断 $\cos x$ 的正负，因为当 $x\in[-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{4}]$ 时，$\cos x>0$，所以 $a\le\frac{2\sin x}{\cos x}=2\tan x$，

函数 $y=2\tan x$ 在 $[-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{4}]$ 上↗，所以 $(2\tan x)_{\min}=2\tan(-\frac{\pi}{3})=-2\sqrt{3}$，故 $a\le -2\sqrt{3}$.

答案： $(-\infty,-2\sqrt{3}]$

【反思】 并不是每一道题都宜采用整体换元法，换元前应先评估接下来的计算复杂度如何，有的题目不整体换元，直接对所给函数进行分析可能更简单.

类型Ⅲ：对称轴、对称中心、单调区间综合

【例 4】函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的对称轴方程是_____，对称中心是_____.

解析： $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的对称轴处函数值为 ±1，即 $\sin(2x+\frac{\pi}{4})=\pm1$，令 $t=2x+\frac{\pi}{4}$，则 $\sin t=\pm1$，

所以 $t=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，解得：$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$，

所以 $f(x)$ 的对称轴方程是 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$；

又 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的对称中心处函数值为 0，即 $\sin(2x+\frac{\pi}{4})=0$，也即 $\sin t=0$，所以 $t=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

从而 $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi$，故 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$，所以 $f(x)$ 的对称中心是 $(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8},0)(k\in\mathbf{Z})$.

答案： $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$，$(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8},0)(k\in\mathbf{Z})$

【反思】 ① $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象上的零点处即为对称中心，最值点处即为对称轴；特别地，若 $f(x)$ 是奇函数，则 $x=0$ 处函数值为 0，若 $f(x)$ 为偶函数，则 $x=0$ 为对称轴，$f(0)$ 为最大值或最小值；②本题求解过程用到了整体换元法，将 $\omega x+\varphi$ 换成了 t，在熟悉以后，可不用换元，故在后续题目中我们将省略换

元的步骤，直接将 $\omega x+\varphi$ 看作整体处理.

【变式 1】（多选）已知奇函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的最小正周期为 4π，将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g(x)$ 的图象（　　）

（A）关于点 $(-\frac{5\pi}{3},0)$ 对称　　　（B）关于点 $(\frac{\pi}{2},0)$ 对称

（C）关于直线 $x=-\frac{2\pi}{3}$ 对称　　　（D）关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称

解析： 要判断选项，需求出 $g(x)$ 的解析式，$g(x)$ 是由 $f(x)$ 平移得来的，所以先求 $f(x)$ 的解析式，

$f(x)$ 的最小正周期为 $4\pi\Rightarrow\frac{2\pi}{\omega}=4\pi\Rightarrow\omega=\frac{1}{2}$，所以 $f(x)=2\cos(\frac{x}{2}+\varphi)$，

又 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(0)=2\cos\varphi=0$，从而 $\cos\varphi=0$，故 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

又 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，$f(x)=2\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2})=-2\sin\frac{x}{2}$，故 $g(x)=f(x-\frac{\pi}{3})=-2\sin\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{3})=-2\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6})$，

A 项，$g(-\frac{5\pi}{3})=-2\sin[\frac{1}{2}\times(-\frac{5\pi}{3})-\frac{\pi}{6}]=-2\sin(-\pi)=0\Rightarrow g(x)$ 关于点 $(-\frac{5\pi}{3},0)$ 对称，故 A 项正确；

B 项，$g(\frac{\pi}{2})=-2\sin(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})=-2\sin\frac{\pi}{12}\neq0\Rightarrow g(x)$ 不关于点 $(\frac{\pi}{2},0)$ 对称，故 B 项错误；

C 项，$g(-\frac{2\pi}{3})=-2\sin[\frac{1}{2}\times(-\frac{2\pi}{3})-\frac{\pi}{6}]=-2\sin(-\frac{\pi}{2})=2\Rightarrow g(x)$ 关于直线 $x=-\frac{2\pi}{3}$ 对称，故 C 项正确；

D 项，$g(\frac{\pi}{2})=-2\sin(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})=-2\sin\frac{\pi}{12}\neq\pm2\Rightarrow g(x)$ 不关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，故 D 项错误.

答案： AC

【变式 2】已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|\le\frac{\pi}{2})$，$x=-\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点，$x=\frac{\pi}{4}$ 为 $y=f(x)$ 图象的对称轴，且 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})$ 上单调，则 ω 的最大值是（　　）

（A）12　（B）11　（C）10　（D）9

解析： 先把题干所给的零点和对称轴这两个条件翻译出来，建立关于 ω 的方程组，

$x=-\frac{\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 的零点 $\Rightarrow-\frac{\pi}{4}\omega+\varphi=k_1\pi(k_1\in\mathbf{Z})$，$x=\frac{\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 图象的对称轴 $\Rightarrow\frac{\pi}{4}\omega+\varphi=k_2\pi+\frac{\pi}{2}(k_2\in\mathbf{Z})$，

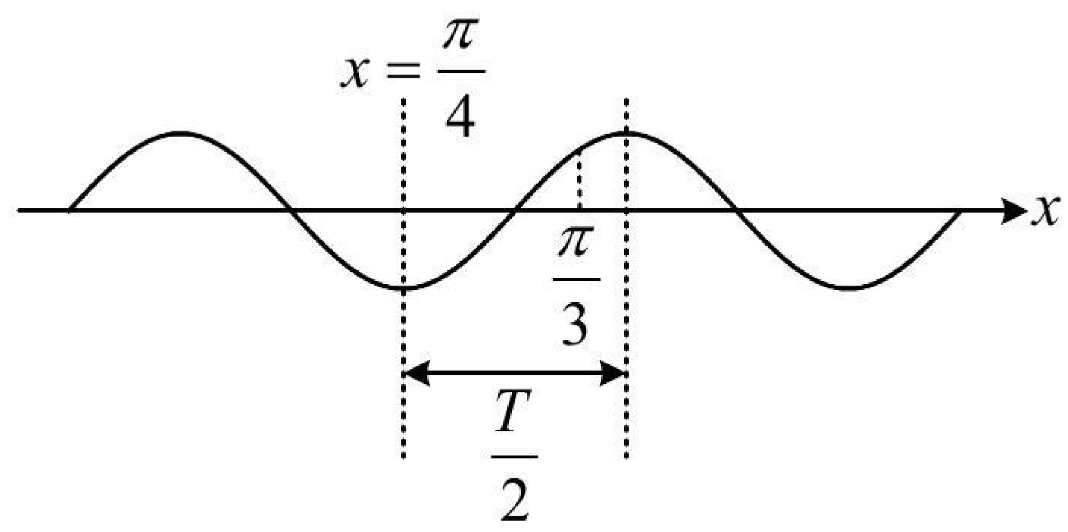
我们要求 ω 的最大值，应消去 φ，两式作差得：$-\frac{\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{4}\omega=(k_1-k_2)\pi-\frac{\pi}{2}$，整理得：$\omega=2(k_2-k_1)+1$，

注意到 k_1，k_2 均为任意整数，所以 k_2-k_1 也为任意整数，记 $k=k_2-k_1$，则 $\omega=2k+1(k\in\mathbf{Z})$，

接下来可由 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})$ 上单调，来约束 ω 的范围，如图，注意到 $x=\frac{\pi}{4}$ 处是最值点，所以 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})$ 上单调的充要条件是区间宽度不超过半个周期 $\frac{T}{2}$，

所以 $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\le\frac{T}{2}$，从而 $T\ge\frac{\pi}{6}$，故 $\frac{2\pi}{\omega}\ge\frac{\pi}{6}$，所以 $\omega\le 12$，结合 $\omega=2k+1(k\in\mathbf{Z})$ 可得 $\omega_{\max}=11$.

答案：B



【反思】当题目直接给出某些点的坐标时（例如对称轴、对称中心或其它点），可考虑用代数形式翻译这些条件，找到 ω 的通解（例如上面的 $\omega=2(k_2-k_1)+1$），再来确定整数 k_1，k_2 的取值.

【例 5】已知将函数 $f(x)=\sin\omega x-\sqrt{3}\cos\omega x(\omega>0)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到的函数 $g(x)$ 的图象关于 y 轴对称，则 ω 的最小值为（　　）

（A）1　（B）2　（C）$\frac{2}{3}$　（D）5

解法 1：先把 $f(x)$ 的解析式化简，并求出平移后的函数 $g(x)$ 的解析式，

由题意，$f(x)=2\sin(\omega x-\frac{\pi}{3})$，所以 $g(x)=f(x+\frac{\pi}{6})=2\sin[\omega(x+\frac{\pi}{6})-\frac{\pi}{3}]=2\sin(\omega x+\frac{\pi\omega}{6}-\frac{\pi}{3})$，

因为 $g(x)$ 的图象关于 y 轴对称，则 $x=0$ 是 $g(x)$ 的一条对称轴，所以 $g(0)=2\sin(\frac{\pi\omega}{6}-\frac{\pi}{3})=\pm 2$，

从而 $\sin(\frac{\pi\omega}{6}-\frac{\pi}{3})=\pm 1$，故 $\frac{\pi\omega}{6}-\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，所以 $\omega=6k+5(k\in\mathbf{Z})$，又 $\omega>0$，所以 $\omega_{\min}=5$.

解法 2：本题也可不求 $g(x)$ 的解析式，根据平移关系由 $g(x)$ 的对称性推断出 $f(x)$ 的对称性，

因为 $g(x)$ 关于 y 轴对称，且 $g(x)$ 由 $f(x)$ 左移 $\frac{\pi}{6}$ 得来，所以 $f(x)$ 关于 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称，

由题意，$f(x)=2\sin(\omega x-\frac{\pi}{3})$，所以 $\frac{\pi\omega}{6}-\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，故 $\omega=6k+5(k\in\mathbf{Z})$，又 $\omega>0$，所以 $\omega_{\min}=5$.

答案：D

类型Ⅳ：整体换元法分析零点与极值点

【例 6】若函数 $f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{4})(\omega>0)$ 在 $(0,\pi)$ 上有且仅有 1 个零点和 1 个极值点，则 ω 的取值范围为______.

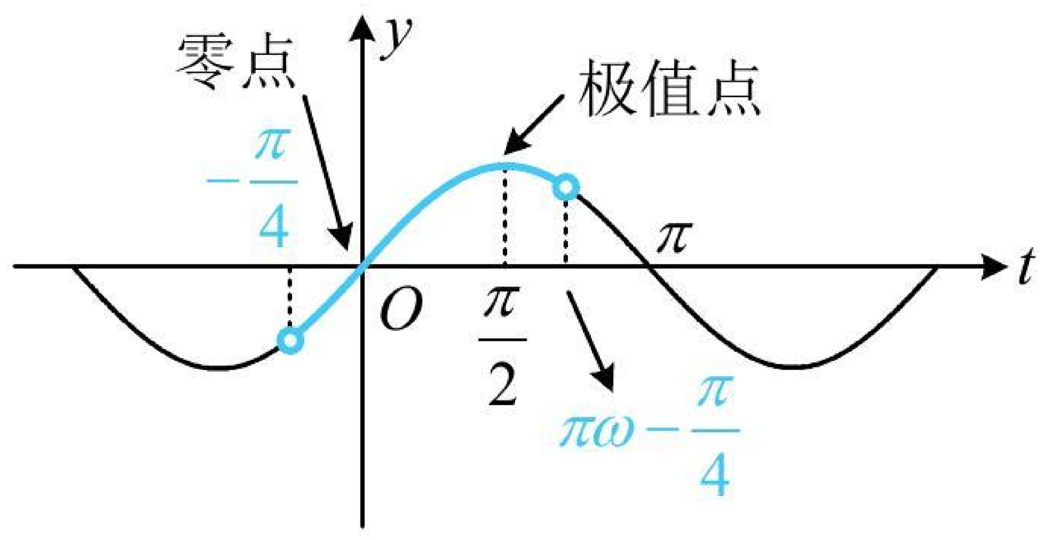
解析：为了便于分析，先将 $\omega x-\frac{\pi}{4}$ 换元成 t，利用 $y=\sin t$ 的图象来研究零点和极值点，

设 $t=\omega x-\frac{\pi}{4}$，则 $f(x)=\sin t$，当 $x\in(0,\pi)$ 时，$t\in(-\frac{\pi}{4},\pi\omega-\frac{\pi}{4})$，

所以问题等价于 $y=\sin t$ 在 $(-\frac{\pi}{4},\pi\omega-\frac{\pi}{4})$ 上有 1 个零点和 1 个极值点，

如图，由图可知应有 $\frac{\pi}{2}<\pi\omega-\frac{\pi}{4}\le\pi$，解得：$\frac{3}{4}<\omega\le\frac{5}{4}$.

答案：$(\frac{3}{4},\frac{5}{4}]$



强化训练

类型 I：三角函数的基本性质

1．（2022·安徽合肥二模·★★）将函数 $y=\sin x$ 的图象上各点横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $y=f(x)$ 的图象，当 $x\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}]$ 时，$f(x)$ 的值域为（　　）

（A）$[-1,1]$　　（B）$[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$　　（C）$[-\frac{\sqrt{3}}{2},1]$　　（D）$[-\frac{1}{2},1]$

2．（★★）设 $f(x)=2\sin x\cos x-2\sqrt{3}\cos^2 x+\sqrt{3}(x\in\mathbf{R})$，则不等式 $f(x)\ge 1$ 的解集为_____.

3．（2022·安徽黄山模拟·★★）函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 在 $[\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{4}]$ 上的单调递增区间是_____.

4．（2022·陕西宝鸡模拟·★★）函数 $y=\sin(\frac{\pi}{4}-2x)$ 的单调递减区间是（　　）

（A）$[k\pi-\frac{\pi}{8},k\pi+\frac{3\pi}{8}](k\in\mathbf{Z})$

（B）$[2k\pi-\frac{\pi}{8},2k\pi+\frac{3\pi}{8}](k\in\mathbf{Z})$

（C）$[2k\pi+\frac{3\pi}{8},2k\pi+\frac{7\pi}{8}](k\in\mathbf{Z})$

（D）$[k\pi+\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{7\pi}{8}](k\in\mathbf{Z})$

5．（2022・宁夏银川模拟・★★）已知函数 $g(x)=\cos x+\sin x$，$h(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2})+\sin(x+\pi)$，设 $f(x)=g(x-\frac{\pi}{6})h(x-\frac{\pi}{6})$，则 $f(x)$ 的单调递增区间是（　　）

（A）$[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}](k\in\mathbf{Z})$

（B）$[k\pi+\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{11\pi}{12}](k\in\mathbf{Z})$

（C）$[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}](k\in\mathbf{Z})$

（D）$[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2\pi}{3}](k\in\mathbf{Z})$

6．（★★★）（多选）已知函数 $f(x)=\tan(2x-\frac{\pi}{3})$，则下列说法正确的是（　　）

（A）函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$

（B）函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12},k\in\mathbf{Z}\}$

（C）点 $(\frac{5\pi}{12},0)$ 是函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心

（D）$f(x)$ 的单调递增区间是 $(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3})(k\in\mathbf{Z})$

7．（2022·广东模拟·★★★）（多选）将函数 $f(x)=\sin 3x-\sqrt{3}\cos 3x+1$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到函数 $g(x)$ 的图象，则（　　）

（A）$g(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{5\pi}{9}$ 对称

（B）$g(x)$ 的最小正周期是 $\frac{2\pi}{3}$

（C）$g(x)$ 的图象关于 $(\frac{11\pi}{18},1)$ 对称

（D）$g(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{4\pi}{9}]$ 上单调递减

类型Ⅱ：含参的单调性相关问题

8．（2022·浙江开学改·★★）函数 $f(x)=\cos(\omega x+\frac{3\pi}{4})(\omega>0)$ 在区间 $(0,1)$ 上不可能（　　）

（A）有最大值　（B）有最小值　（C）单调递增　（D）单调递减

9．（2022·云南嵩明模拟改·★★★）若函数 $f(x)=2\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})$ 在区间 $[-a,a](a>0)$ 上单调递增，则 a 的取值范围为（　　）

（A）$(0,\frac{\pi}{3}]$　（B）$(0,\frac{2\pi}{3}]$　（C）$(0,\frac{4\pi}{3}]$　（D）$(0,\frac{5\pi}{3}]$

10．（2022 •江苏模拟改 •★★★★）若 $f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 在 $(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})$ 上单调，则 ω 的取值范围为_____.

类型III：零点与极值点问题

11．（2023 • 新高考 I 卷 • ★★）已知函数 $f(x)=\cos\omega x-1(\omega>0)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 有且仅有 3 个零点，则 ω 的取值范围是_____.

12．（2022 • 江西南昌模拟 • ★★★）若函数 $f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 在 $(0,\pi)$ 上恰有 1 个极大值点，无极小值点，则 ω 的取值范围为_____.

13．（2022 •河南安阳模拟 •★★★）已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)-1(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的图象经过原点，且 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有且仅有一个零点，则 ω 的最大值为（　　）

（A）$\frac{4}{3}$　（B）$\frac{1}{2}$　（C）2　（D）$\frac{13}{6}$

类型IV：代值与条件综合翻译

14．（2022 • 全国乙卷 • ★★）记函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的最小正周期为 T，若 $f(T)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x=\frac{\pi}{9}$ 为 $f(x)$ 的零点，则 ω 的最小值为_____.

15．（2023·湖南模拟·★★★）记函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 的最小正周期为 T，若 $\frac{\pi}{4}<T<\frac{\pi}{2}$，且 $f(x)\le\left|f(\frac{\pi}{3})\right|$，则 $\omega=$（　　）

（A）4　（B）5　（C）6　（D）7

16．（2022·新高考Ⅰ卷·★★★）记函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})+b(\omega>0)$ 的最小正周期为 T，若 $\frac{2\pi}{3}<T<\pi$，且 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{3\pi}{2},2)$ 中心对称，则 $f(\frac{\pi}{2})=$（　　）

（A）1　（B）$\frac{3}{2}$　（C）$\frac{5}{2}$　（D）3

17．（2023·四川成都模拟·★★★★）函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{3}$，其图象关于 $(\frac{\pi}{18},0)$ 对称，且当 $x\in[\frac{\pi}{6},m]$ 时，$f(x)$ 的值域为 $[-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}]$，则 m 的取值范围为（　　）

（A）$[\frac{\pi}{9},\frac{7\pi}{18}]$　（B）$[\frac{2\pi}{9},\frac{7\pi}{18}]$　（C）$[\frac{\pi}{9},\frac{5\pi}{18}]$　（D）$[\frac{2\pi}{9},\frac{5\pi}{18}]$

18．（2022·河南模拟·★★★★）已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$，将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6\omega}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象，若 $g(x)$ 是奇函数，$f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{6})$ 上单调递增，则 ω 的最大值为（　　）

（A）$\frac{2}{3}$　（B）1　（C）2　（D）3

19．（2023·四省联考·★★★★）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 在 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$ 单调，其中 ω 为正整数，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，

且 $f(\frac{\pi}{2})=f(\frac{2\pi}{3})$.

（1）求 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴；

（2）若 $f(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 φ.